AUTOR(ES): ELTON LUIS CARLOS JUNIOR, DANIEL OLIVEIRA SILVA e FERNANDO FÉLIX OLIVEIRA E SILVA.
ORIENTADOR(A): DANIEL OLIVEIRA SILVA

Topologia da ordem

Introdução

A topologia foi originada como uma ramificação da geometria, mas foi no fim do século XX, que ela se expandiu para outras áreas como álgebra e análise, podendo ser considerada uma das partes fundamentais da matemática. De modo genérico, pode-se descrever a topologia como estudo da continuidade. Considerando a topologia uma ramificação da geometria, é possível declará-la como o estudo das propriedades de figuras geométricas que se mantêm constantes sob aplicações contínuas cujas inversas também são contínuas. Neste trabalho vamos dar atenção a um subitem da topologia geral, a topologia da ordem, que é uma topologia definida utilizando-se das chamadas relações de ordem. Este trabalho irá tratar de sua definição e algumas de suas propriedades.

Material e Métodos

Este trabalho é resultado de uma iniciação científica em matemática, realizada dentro do Programa Institucional de Iniciação Científica Voluntária (PROINIC – ICV) da Universidade Estadual de Montes Claros (UNIMONTES), sob a orientação de um professor dessa universidade e teve como objetivo preencher os requisitos necessários para obtenção do certificado de conclusão de iniciação científica. O trabalho foi desenvolvido por meio de estudos individuais, discussões e apresentação de seminários.

Resultados e Discussão

O que é topologia?

Definição 1: Uma topologia em um conjunto X (denotada por τ) é uma coleção de subconjuntos de X tal que essa coleção obedece às seguintes propriedades:

1) $\emptyset$ e X estão em τ.
2) A união dos elementos de qualquer subcoleção de τ está em τ.
3) A interseção dos elementos de qualquer subcoleção finita de τ está em τ.

Sabendo disso, é definido então um espaço topológico como um par ordenado (X,τ) que consiste em um conjunto X e uma topologia τ em X. Tal conjunto X para o qual uma topologia τ é especificada chama-se espaço topológico.

Exemplo 1: Se X é qualquer conjunto, a coleção de todos os subconjuntos de X (conhecida como conjunto das partes) é uma topologia em X; isso é chamado de topologia discreta. A coleção que consiste apenas em X e $\emptyset$ também é uma topologia em X; normalmente chamada de Topologia trivial.

Definição 2. Seja X um conjunto qualquer. Uma coleção β de subconjuntos de X é uma *base para uma topologia sobre* X se, e somente se, as duas condições abaixo são satisfeitas:

i) Para cada $x \in X$, existe pelo menos um conjunto $B \in \beta$ tal que $x \in B$.

ii) Se x pertence à interseção de dois conjuntos B_1, $B_2 \in \beta$ então existe um conjunto $B_3 \in \beta$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

O termo *base* se justifica, pois se β é base para uma topologia sobre X podemos construir a partir de β uma topologia τ_β sobre X (chamada *topologia gerada por* β), da seguinte forma:

$$\tau_\beta = \{U \subset X;\ \forall x \in U, \exists B \in \beta \text{ com } x \in B \subset U\}$$

O que é uma relação de ordem?

Definição 3: Uma relação C em um conjunto A é chamada de relação de ordem (ou uma ordem simples ou uma ordem linear) se obedece às seguintes propriedades (veja [1], p. 24):

1) (Comparabilidade) Para cada x e y em A com x ≠ y, temos que xCy ou yCx.
2) (Não refletividade) Para nenhum x em A mantém a relação xCx.
3) (Transitividade) Se xCy e yCz, então xCz.

Um conjunto A com uma relação de ordem simples é chamado de simplesmente ordenado.

Exemplo 2: A relação "<" no conjunto dos números reais é uma relação de ordem simples.

Topologia da Ordem

Se X é um conjunto simplesmente ordenado, existe uma topologia natural para X, definida usando a relação de ordem definida acima, tal topologia é chamada de topologia da ordem, e a definiremos a seguir.

Suponha que X é um conjunto com uma relação de ordem simples <. Dados dois elementos a e b ∈ X de modo que a < b, existem quatro subconjuntos de X que são chamados de intervalos determinados por a e b. Eles são os seguintes:

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\},$$
$$(a, b] = \{x \mid a < x \le b\},$$
$$[a, b) = \{x \mid a \le x < b\},$$
$$[a, b] = \{x \mid a \le x \le b\}.$$

Um conjunto do primeiro tipo é chamado de intervalo aberto em X, um conjunto do último tipo é chamado de intervalo fechado em X e os conjuntos do segundo e terceiro tipos são chamados de intervalos semiabertos. O uso do termo "aberto" aqui, sugere que os intervalos abertos em X devem se tornar conjuntos abertos quando colocamos uma topologia em X.

Definição 4: Seja X um conjunto com uma relação de ordem simples; suponha que X tenha mais de um elemento. Seja β a coleção de todos os conjuntos dos seguintes tipos:

1) Todos os intervalos abertos (a, b) em X.
2) Todos os intervalos da forma $[a_0, b)$, onde a_0 é o menor elemento (se houver) de X.
3) Todos os intervalos da forma $(a, b_0]$, em que b_0 é o maior elemento (se houver) de X.

A coleção β é uma base para uma topologia em X, chamada de topologia da ordem. Caso X não tenha o menor elemento, não haverá conjuntos do tipo (2) e se X não tiver o maior elemento, não haverá conjuntos do tipo (3).

Agora apresentaremos a equivalência entre ponto interior num espaço métrico e num espaço com a topologia da ordem.

Definic¸a˜o 5. Uma me´trica e´ uma func¸a˜o $d\colon M \times M \to R$ com as seguintes propriedades: Dados x,y,z $\in M$,

1. d(x,y) ≥ 0;
2. d(x, y) = 0 ⟺ x = y;
3. d(x,y) = d(y,x);
4. d(x,z) ≤ d(x,y) + d(y,z).

Um conjunto M munido de uma métrica d é chamado espaço métrico e é denotado por (M,d).

Definição 6: Seja A um subconjunto de um espaço métrico M, p é ponto interior de A quando existe um r > 0 (raio positivo) tal que, a bola de centro p e raio r, B(p;r) ⊂ A.

Definição 7: Sejam X um conjunto simplesmente ordenado e S um subconjunto de X. Um ponto x ∈ S é dito interior à direita em S relativamente a X se x é o maior elemento de X ou se existe b ∈ X tal que b > x e]x, b[⊂ S. Similarmente, dizemos que x ∈ S é interior à esquerda em S relativamente a X se x é o menor elemento de X ou se existe a ∈ X tal que a < x e]a, x[⊂ S.

Lema 1: Sejam X um conjunto simplesmente ordenado, S um subconjunto de X e x ∈ S. Então x é um ponto interior de S com respeito à topologia da ordem de X se e somente se x é ao mesmo tempo um ponto interior à direita e um ponto interior à esquerda de S relativamente a X.

Demonstração: Basta observar que x é um ponto interior de S com respeito à topologia da ordem de X se e somente se x pertence a um aberto básico da topologia da ordem de X contido em S. A demonstração do lema é obtida a partir dessa observação por uma análise de casos.

Em seguida apresentaremos exemplos de espaços topológicos com a topologia da ordem e finalizaremos o trabalho observando que a topologia usual da reta nada mais é que a topologia da ordem originada da ordem usual da reta.

Exemplo 3: Os números inteiros positivos formam um conjunto ordenado com um menor elemento. A topologia da ordem em Z_+ é a topologia discreta, pois todo conjunto formado por apenas um ponto é aberto: se n > 1, o conjunto {n} = (n - 1, n + 1) que é um elemento básico; e se n = 1, o conjunto ponto {1} = [1, 2) também é um elemento básico.

Exemplo 4: A topologia usual em ℝ é apenas a topologia da ordem derivada da ordem usual em R.

Considerações finais

Entender a matemática é algo nada simples, pois seus elementos são em sua grande maioria muito abstratos. Entretanto, quando se aprende a visualizar a matemática, tornando o pensamento abstrato algo como que palpável isso gera em nos o prazer de fazer matemática. Durante a iniciação cientifica e também durante a escrita desse trabalho, pude sentir em meu interior o prazer gerado pelo saber matemático, um prazer experimentado por poucos. Saber que uma simples definição de topologia como uma coleção de subconjuntos, com algumas condições, possui desdobramentos que influenciam diversas áreas da Matemática é fascinante.

Nesse trabalho pudemos observar como uma relação de ordem simples sobre um conjunto origina topologias naturais e pudemos interpretar tais topologias como topologias já conhecidas e geradas, a princípio, sem se falar de relação de ordem, como no caso dos exemplos 3 e 4 acima.

Fazer essa iniciação não foi fácil, mas com a mistura da imaginação e das definições, "voamos" alto a cada aula, desde as definições mais simples como a de que uma topologia, até as definições de base de uma topologia. Posso resumir todo esse trabalho como uma grande aventura, que me sinto muito grato por ter participado dela.

Agradecimentos

Agradeço ao meu professor orientador, pelo convite e pela atenção concedida a mim durante a iniciação científica na Universidade Estadual de Montes Claros (UNIMONTES) e ao Programa Institucional de Iniciação Científica (PROINIC - ICV) pelo apoio.

Referências

R. MUNKRES, James. *Topology*. 2. ed. [S.l.: s.n.], 2000. 537 p.

WHITLEY EVES, Howard. *Introducção à história da Matemática*. 5. ed. Campinas,SP: Editora da Unicamp, 2011. 848 p.

MUJICA, Jorge. Notas de Topologia Geral. IME-UNICAMP. São Paulo. 2005. Disponível em: https://www.ime.unicamp.br/~rigas/topolmujica/14.pdf. Acesso em: 25/09/2021

TOPOLOGIA da Ordem. IME-USP. São Paulo. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~tausk/texts/TopologiaOrdem.pdf. Acesso em: 25/09/2021